**№3.4 Числова послідовність і її границя**

Числовою послідовністю називається відображення множини натуральних чисел в множину дійсних чи числова функція, визначена на множині натуральних чисел.

N→R

{xn} ∞n=1

1. xn = {1, , , …, }

xn – загальний член числової послідовності

n = 1, 2, …, n – члени числової послідовності

1. an = a1+ d(n-1) арифметична прогресія
2. xn = , n ∈ N
3. xn = xn-1 + xn- 2, x1 = 0, x2 = 1, x3 ≥ 3 числа Фібоначчі
4. xn = (-1)n стаціонарна числова послідовність

Геометрична інтерпретація:

0 1,3 1,2 1 точки числової осі



.

.

точки площини

Число називається границею числової послідовності xn, якщо для будь-якого якзавгодно малого додатнього Е знайдеться такий номер N(E) члена послідовності починаючи з якого виконується нерівність

|xn - a| < E ∀ n > N(E)

{limn→∞xn=a } = ∀ E > 0 ∃ N(E) ∀ n>N(E) => |xn – a| < E

Число а є границею послідовності і це означає, що для будь-якого якзавгодно малого Е-околу точки а знайдеться такий номер члена послідовності починаючи з якого всі подальші члени послідовності попадають в Е-окіл точки а. Поза околом знаходиться скінченне число членів послідовності.

Послідовність, що має границю – називається збіжною та якщо не має – розбіжною.

∃ limn→∞=0

∀ E>0

∀ N(E):|1/n-0|<E

∀n>N(E)

n>1/E

Візьмемо за N(E) = 1/E

n> [1/E]

**Властивості збіжних числових послідовностей**

**теорема 1.** Про єдиність границі

Якщо числова послідовність має границю, то вона єдина.

Заумовою   
∃ limn→∞xn=0

Доводимо від супротивного:

припустимо, що числова послідовність має границю, що не дорівнює а.

∃ limn→∞xn=b

b > a, b ≠ a

∀ E>0

∀ N(E):n>N(E) xn ∈ O(a, E)

∀ N2(E):∀n>N2(E) xn ∈ O(b, E)

Вибираємо N таким, щоб O(a, E) ∩ O(b, E) = ∅

При n > N(E) x ∈ O(a, E) та xn O(b, E)

Цього не може бути, отже теорема доведена.

**теорема 2.** Необхідна ознака існування границі послідовності

Якщо послідовність збіжна, то вона обмежена

∃ limn→∞xn=а

∀ E>0

∃ N(E): ∀n>NE=>|xn – a| < E

∀n>N(E)

a – E < xn < a + E

xn < M ∀n>N(E) => обмеженість числової послідовності

**теорема 3.** Теорема Вейєрштрасса – достатня умова збіжності числової послідовності

Будь-яка монотонна і обмежена числова послідовність є збіжною

1) {xn}↑ xn+1 ≥ xn

обмежена зверху, монотонно зростає

*∃ M: xn≤M*

*∀n∈N*

*∃ limn→∞xn*

2)

{xn}↓ xn+1 ≤ xn

обмежена знизу

*∃ m: xn≥m*

*∀n∈N*

*∃ limn→∞xn*

**Арифметичні дії над збіжними числовими послідовностями**

1)lim(xn±yn) = lim xn± lim yn

2) lim(xn∙yn) = lim xn∙ lim yn

3) lim = , lim yn≠0

**№5)** e=2,718281828…-Неперове число;Існує Доведення за Т.Вейерштрасса; Треба Довести:1)зростає;2) обм. Зверху ;За формулою Бінома Ньютона…: Возведення у ступінь: + )+ Записуємо теж саме для ; «Кожна дужка в розкладі більше ніж .Крім того містить на 1 доданок більше» > Отже зростаюча послідовність; =2+ З цього слідує що послідовність За Т.Вейерштрасса слідує існування =ln a; f(x)=

**№6)** Обмежена,обмежена зверху,обмежена знизу,коли існує таке число М, що для всіх nЄN виконується відповідно нерівності: ll<=M;<=M;

Монотонна, тобто зростаюча,спадна,незростаюча,неспадна, коли для всіх nЄN виконуються відповідно нерівності: .

**Т. Вейерштрасса** про існування границі числової послідовності:

Якщо послідовності {},{=a;

Доведення: 1)l l< +

2)для того ж >0 ll<

З умови 1 Теореми та пунктів 1,2 маємо:

**Підпослідовність послідовностей**: Нехай З елементів цієї послідовності можемо скласти безліч послідовностей:{={

{-підпослідовність;

**Т**. Із будь-якої обмеженої послідовності можна виділити збіжну під послід.

**А**-множина підпослідовностей.

Верхньою границею послідовності {називається

Нижньою границею послідовності {називається

**№7**  Поняття границі функції по Гейне - Нехай функція f(x) визначена у всіх точках проміжку (a,b), за винятком, можливо, деякої точки x0є(a;b). Побудуємо послідовність значень аргументу функції f(x):

X1,x2,x3,x4,…,xn,…nєN (xn≠x0) таку, щоб всі члени послідовності належали проміжку (a,b) і послідовність збігалась до точки x0:

(1)

Говорять, що число A є границею функції f(x) при x, що прямує до x0, якщо для будь-якої послідовності значень аргументу (1), яка збігається до числа x0, послідовність значень функції збігається до числа A, і пишуть

Поняття границі функції по Коші число А є границею функції f(x) при x, що прямує до x0, якщо для будь-якого додатнього числа έ знайдеться таке додатне число б , яке залежить від έ, що при всіх x є (a,b), які задовільняють нерівність виконується нерівність

Односторонні границі функції: Число b називають границею справа (зліва) ф-ї f(x) в точці x=a, якщо Існування функції в точці дозволяє існувати односторонній границі.

Критерій Коші існування границі функцій: для того, щоб ф-я f(x) мала границыю при x->a необхідно і досить

**№8.** Перша чудова границя. .

0<x<П/2

S При x - >+0

Наслідки: 1. . 2. ; 3.

**№9.**

## Второй замечательный предел

\lim_{x \to \infty}\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e

**Доказательство второго замечательного предела:**\blacktriangleleft  Докажем вначале теорему для случая последовательности x_{n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n; n\mathcal{2}~\mathbb N 

По формуле [бинома Ньютона](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%91%D0%B8%D0%BD%D0%BE%D0%BC_%D0%9D%D1%8C%D1%8E%D1%82%D0%BE%D0%BD%D0%B0): (a + b)^n = a^n~+~\frac{n}{1}\cdot a^{n-1}\cdot b~+~\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\cdot a^{n-2}\cdot b^2 ~+~ ... ~+~ \frac{n(n-1)(n-2)...(n-(n-1))}{1\cdot 2\cdot 3 \cdot ... \cdot n}\cdot b^n; n\mathcal{2}~\mathbb N 

Полагая a=1;~b=\frac{1}{n}, получим:

\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1~+~\frac{n}{1}\cdot\frac{1}{n}~+~\frac{n(n-1)}{1\cdot2}\cdot \frac{1}{n^2}~+~\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot2\cdot3}\cdot\frac{1}{n^3}~+~...~+~\frac{n(n-1)(n-2)...(n-(n-1))}{1\cdot2\cdot3\cdot...\cdot n}\cdot \frac{1}{n^n} = 

 =1~+~1~+~\frac{1}{1\cdot2}\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)~+~\frac{1}{1\cdot2\cdot3}\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\left(1-\frac{2}{n}\right)~+~ ... ~+~ \frac{1}{1\cdot2\cdot3\cdot...\cdot n}\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdot...\cdot\left(1-\frac{n-1}{n}\right) ~~~~~      (1)

Из данного равенства (1) следует, что с увеличением n число положительных слагаемых в правой части увеличивается. Кроме того, при увеличении n число \frac{1}{n}убывает, поэтому величины \left(1 - \frac{1}{n}\right), \left(1-\frac{2}{n}\right), ...возрастают. Поэтому последовательность \{x_{n}\} = \left\{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right\}; n\mathcal{2}\Nu — *возрастающая*, при этом

\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n > 2 ~~~~~     (2).

Покажем, что она ограничена. Заменим каждую скобку в правой части равенства на единицу, правая часть увеличится, получим неравенство

\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 1+1+\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{1\cdot2\cdot3}~+~...~+~\frac{1}{1\cdot2\cdot3\cdot ... \cdot n}

Усилим полученное неравенство, заменим 3,4,5, …, стоящие в знаменателях дробей, числом 2:

\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<1+\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+...+\frac{1}{2^{n-1}}\right).

Сумму в скобке найдем по формуле суммы членов геометрической прогрессии:

1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+...+\frac{1}{2^{n-1}} = \frac{1\cdot\left(1-(\frac{1}{2})^n\right)}{1-\frac{1}{2}}=2\cdot \left(1-\frac{1}{2^n}\right)<2.

Поэтому \left(1+\frac{1}{n}\right)^n<1+2=3~~~~~      (3).

Итак, последовательность ограничена сверху, при этом \mathcal{8} n\mathcal{2}~\mathbb Nвыполняются неравенства (2) и (3):   2~<~\left(1+\frac{1}{n}\right)^n~<~3.

Следовательно, на основании теоремы Вейерштрасса (критерий сходимости последовательности) последовательность x_{n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, n\mathcal{2}~\mathbb N монотонно возрастает и ограниченна, значит имеет предел, обозначаемый буквой [**e**](http://ru.wikipedia.org/wiki/E_%28%D0%BC%D0%B0%D1%82%D0%B5%D0%BC%D0%B0%D1%82%D0%B8%D1%87%D0%B5%D1%81%D0%BA%D0%B0%D1%8F_%D0%BA%D0%BE%D0%BD%D1%81%D1%82%D0%B0%D0%BD%D1%82%D0%B0%29). Т.е. \lim_{n \to \infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e\blacktriangleright

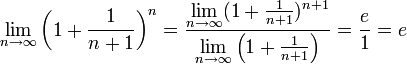
\blacktriangleleft   Зная, что второй замечательный предел верен для натуральных значений x, докажем второй замечательный предел для вещественных x, то есть докажем, что \lim_{x \to \infty}\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e;x\mathcal{2}~\mathbb R . Рассмотрим два случая:

1. Пусть x \rightarrow +\mathcal{1}. Каждое значение x заключено между двумя положительными целыми числами: n\leqslant x<n+1, где ~n = [x] — это целая часть x.

Отсюда следует: \frac{1}{n+1}<\frac{1}{x}\leqslant \frac{1}{n}~~\Longleftrightarrow~~1+\frac{1}{n+1}<1+\frac{1}{x}\leqslant 1+\frac{1}{n}, поэтому

\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n<\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\leqslant \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}.

Если x \rightarrow +\mathcal{1}, то n \rightarrow \mathcal{1}. Поэтому, согласно пределу \lim_{n \to \infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e, имеем:



\lim_{n \to \infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = \lim_{n \to \infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\cdot \lim_{n \to \infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)=e\cdot 1=e.

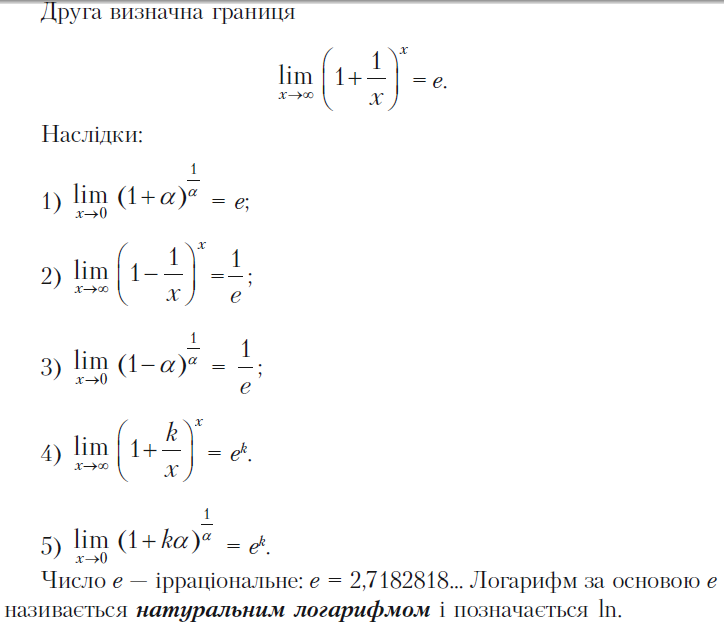
По признаку (о пределе промежуточной функции) существования пределов \lim_{x \to +\infty}\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e.

2. Пусть x \to -\infty. Сделаем подстановку − *x* = *t*, тогда

\lim_{x \to -\infty}\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{t \to +\infty}\left(1 - \frac{1}{t}\right)^{-t}= \lim_{t \to +\infty}\left(\frac{t}{t-1}\right)^t = \lim_{t \to +\infty}\left(1 + \frac{1}{t-1}\right)^t =

 = \lim_{t \to +\infty}\left(1 + \frac{1}{t-1}\right)^{t-1}\cdot \lim_{t \to +\infty}\left(1 + \frac{1}{t-1}\right)^1 = e\cdot1=e.

Из двух этих случаев вытекает, что \lim_{x \to \infty}\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = eдля вещественного x.    \blacktriangleright



**№10.**

**Узагальнення на випадок нескінченості**

Сформовані вище означення границі функції по Гейне і по Коші можуть бути узагальнені і на випадок, коли замість числа x_0береться +infty(або -infty).

Говорять, що число Aє границею функції f(x)при x, що прямує до +infty, якщо для будь-якого додатнього числа varepsilonзнайдеться таке додатне число Delta, що для всіх x, які задовільняють нерівність x > Delta, виконується нерівність

delim{|}{f(x) - A}{|} < varepsilon;

в цьому випадку пишуть

lim{x right +infty}{f(x)} = A.

Говорять, що функція f(x)прямує до +inftyпри прямуванні xдо x_0, якщо для будь-якого скільки завгодно великого додатнього числа Eзнайдеться таке додатне число delta > 0, що для всіх x, які задовільняють нерівність

0 < delim{|}{x - x_0}{|} < delta,

і таких, що належать області визначення функції, виконується нерівність

f(x) > E;

в цьому випадку пишуть

f(x) right +inftyпри x right x_0, або

lim{x right x_0}{f(x)} = +infty.

**№11.12** Локальні властивості функції що мають границю якщо в точці х=а функція має границю то вона обмежена в деякому околі цієї точки. Якщо функція в цій точці має границю то ця границя єдина . властивості функції що мають границю виражаються нерівності

F(x) φ(x) g(x) визначені в околі точки а крім можливо самої точки і задовільняють умову F(x)<=φ(x)<= g(x)

ТЕОРЕМА (про знак функції і знак границі) якщо функція має границю в точці х=а то знак грниці і знак границі і знак функції співпадають)

Sig f(x)=sig(b) x O(a)

**№13 . Нескінченно малі функції. Означення, порівняння нескінченно малих функцій.**

**Озн.** F(x) нескінченно мала при x→a (a – число або нескінченність), якщо , тобто

**Властивості нескінченно малих фукцій**

1. Алгебраїчна сума скінченного числа нескінченно малих функцій є функція нескінченно мала.
2. Добуток нескінченно малої функції на обмежену є функція нескінченно мала
3. Якщо f(x) нескінченно мала функція при , то є нескінченно великою функцією.

**Порівняння нескінченно малих функцій**

1. Нескінченно мала функція називається вищого порядку малості відносно якщо , , x (o – «о мале»)
2. Нескінченно малі функції при x називаються нескінченно малими одного порядку малості якщо , , У випадку λ=1 нескінченно малі називають еквівалентними: .
3. Нескінченно мала функція називається нескінченно малого k-го порядку малості відносно якщо , ( одного порядку малості).
4. Якщо , то не порівнюються.

**№14. Еквівалентні нескінченно малі функції: означення, приклади. Критерій еквівалентності нескінченно малих функцій. Головна частина нескінченно малої функції. Приклади.**

Таблиця еквівалентних нескінченно малих малих функцій

xsinxtgxarcsinarctgln(1+x)

**Теорема 1.** Границя відношення нескінченно малих функцій дорівнює границі відношення еквівалентних до них функцій.

**Теорема 2**. Алгебраїчна сума скінченного числа нескінченно малих функцій різного порядку малості еквівалентна нескінченно малій функції найменшого порядку малості.

**Приклад.** Нехай , … – нескінченно малі функції при При цьому має найнижчий порядок малості. Тоді при

Еквівалентністю користуються для спрощення обчислення границі функції

**Теорема 3.** Критерій еквівалентності нескінченно малих функцій. Для того, щоб н. м. функції при були еквівалентними необхідно і досить, щоб їх різниця була нескінченно малою відносно будь-якої з них: (

**Приклад.**

**Головна частина нескінченно малої функції**

З критерію еквівалентності нескінченно малих функцій

,

,

В цьому випадку називають головною частиною нескінченно малої функції .

**№15**. Еквівалентності: sinx, tgx, arсsinx, arсtgx ~ x; Ln(1+x)~x; ex-1~x; ax-1~xlna; loga(1+x)~x/lna; (1+x)a-1~ax;

Еквівалентністю користуються для спрощення обчислення границь функції. Для розкриття невизначеностей виду 0/0 часто бувають корисними використання принципу заміни безмежно малі екв. І другі властивості екв. Б. м. ф.

**№16**. Кр. Коші: Для того, щоб ф. f(х) мала границю при х -> а необхідно і досить, щоб для будь-яких(Ā) >0 Ǝ δ) >0: Ā x’, x’’: |x’-x’’|< δ)=>|f(x’)- f(x’’)|< х’, x’’ є O δ(a).

Якщо ф. f(x) має границю, рівну А, то її можна уявити як суму числа А и безмежно малої ф. а(х), тобто якщо , то f(x)=A+a(x).

Нехай слідує

,

Тобто |f(x)-A-0|<. Це означає, що ф. f(x)-A має границю, рівну нулю, тобто є б.м.ф., яку позначимо через а(х): f(x)-A=a(x). Звідси f(x)=A+a(x)

Теорема: Якщо ф. f(x) можна уявити у вигляді суми числа А і б. м. ф. а(х), то число А є границею ф. f(x) , тобто якщо f(x)=A+a(x), то . Нехай f(x)=A+a(x), де а(х) – б.м.ф. при х-> х0 тобто . Тоді =>|a(x)|< . А так по умові f(x)=A+a(x), то а(х)=f(x)-A. Отримуємо => |f(x)-A|<.

А це означає, що

**№17-18** Проте строге математичне означення неперервної функції, яке належить [Коші](http://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%9A%D0%BE%D1%88%D1%96_%D0%9E%D2%91%D1%8E%D1%81%D1%82%D0%B5%D0%BD-%D0%9B%D1%83%D1%97" \o "Коші Оґюстен-Луї), — порівняно нещодавнє, і потребує просунутого рівня математичної абстракції. Інтуїтивне ж означення таке: [функція](http://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%A4%D1%83%D0%BD%D0%BA%D1%86%D1%96%D1%8F" \o "Функція) *f*(*x*) [дійсної](http://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%94%D1%96%D0%B9%D1%81%D0%BD%D1%96_%D1%87%D0%B8%D1%81%D0%BB%D0%B0" \o "Дійсні числа) змінної **неперервна**, якщо малим змінам Δ*x* [аргумента](http://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%90%D1%80%D0%B3%D1%83%D0%BC%D0%B5%D0%BD%D1%82) *x* відповідають малі зміни Δ*f* значення функції, що можна записати так: \Delta f\to 0 коли \Delta x\to 0. Це означає, що [графік](http://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%93%D1%80%D0%B0%D1%84%D1%96%D0%BA_%D1%84%D1%83%D0%BD%D0%BA%D1%86%D1%96%D1%97" \o "Графік функції) неперервної функції не має стрибків, тобто може бути накреслений "не відриваючи олівець від паперу". Всі [елементарні функції](http://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%95%D0%BB%D0%B5%D0%BC%D0%B5%D0%BD%D1%82%D0%B0%D1%80%D0%BD%D1%96_%D1%84%D1%83%D0%BD%D0%BA%D1%86%D1%96%D1%97" \o "Елементарні функції) — неперервні на своїй [області визначення](http://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%9E%D0%B1%D0%BB%D0%B0%D1%81%D1%82%D1%8C_%D0%B2%D0%B8%D0%B7%D0%BD%D0%B0%D1%87%D0%B5%D0%BD%D0%BD%D1%8F_%D1%84%D1%83%D0%BD%D0%BA%D1%86%D1%96%D1%97" \o "Область визначення функції).

Приклад розривної функції в точці *x* = 2. Функція не є неперервною зліва точки *x* = 2  
\lim_{x\to 2 \atop x<2}f(x) = 2 \ne f(2) *f* проте є неперервною справа:  
\lim_{x\to 2 \atop x>2}f(x) = 3 = f(2) *f*.

Функція *f*(*x*) дійсної змінної, яка означена в області D\subseteq \mathbb{R}, **неперервна в точці x_0\in D** якщо для довільного ε > 0 знайдеться таке δ > 0 (яке залежить від ε), що з x\in D, |x-x_0|<\delta випливає | *f*(*x*) − *f*(*x*0) | < ε. Функція *f*(*x*) **неперерена в області S\subseteq\mathbb{R}**, якщо *f*(*x*) неперервна в кожній точці цієї області.

Нехай A \subset \mathbf{R}, \quad f:A \to \mathbf{R}, *x*0 — [гранична точка](http://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%93%D1%80%D0%B0%D0%BD%D0%B8%D1%87%D0%BD%D0%B0_%D1%82%D0%BE%D1%87%D0%BA%D0%B0" \o "Гранична точка) множини A.

Функція f називається **неперервною в точці** *x*0 якщо:

1. функція f(x) визначена в точці x0.
2. існує границя  \lim_{x \to x_0}{f(x)} 
3.  \lim_{x \to x_0}{f(x)}=f(x_0) .

[[ред.](http://uk.wikipedia.org/w/index.php?title=%D0%9D%D0%B5%D0%BF%D0%B5%D1%80%D0%B5%D1%80%D0%B2%D0%BD%D0%B0_%D1%84%D1%83%D0%BD%D0%BA%D1%86%D1%96%D1%8F&action=edit&section=2)]Точки розриву

**Точка розриву** - це така точка (значення аргументу) в якій функція не є неперервною.

Розрізняють такі види точок розриву:

Розрив називають **усувним**, якщо в даній точці існує **границя функції**, що не співпадає з значенням функції.

Точку називають **точкою розриву першого роду**, якщо існують скінченні ліва та права [границі](http://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%93%D1%80%D0%B0%D0%BD%D0%B8%D1%86%D1%8F_%D1%84%D1%83%D0%BD%D0%BA%D1%86%D1%96%D1%97" \o "Границя функції) в даній точці, та вони не співпадають.

Точку називають точкою розриву першого роду типа стрибка , якщо f(x-0)f(x+0) , де h= f(x-0)- f(x+0) – висота стрибка

Якщо хоча б одна одностороння границя не існує, чи нескінченна, то точку називають **точкою розриву другого роду**.

Теорема 1(про неперервність складеної функції в точці):

Z=f(x) неперервна в т. , а ф-ія f=(x) неперервна в т. ,при чому ,то існує суперпозиція Z=f((x)) неперервна в т. .

Теорема 2 ( про існування та неперервність оберненої ф-ії) :

Якщо ф-ія f(x) строго зростає на відрізку і неперервна, то на відрізку існує обернена ф-ія x=g(x) строго зростаюча і неперервна.

**№19.20** Якщо функція f(x) і g(x) неперервні в точці , то в цій точці перервними є функції

(1)

(остання за умови, що g())

Оскільки неперервні в точці функції f(x) g(x) мають границі, що дорівнюють f() g(), то за теоремою то границі функцій (1) існують і відповідно дорівнюють .Але ці величини дорівнюють значенням відповідниї функцій. Отже, функції (1) за першим означенням енпервності є неперервними в точці .

Доведена теорема справедлива для алгеброїчної суми та добутку довілної скінченної кількості перервних в точці функцій.

Якщо функція f(x) строго зростає на відрізку а,b і неперервна, то на відрізку f(a) і f(b) існує обернена функція, яка строго зростає і неперевна.

Функція називається непервною на відрізку, якщо вона неперервна на відрізку[a;b], якщо вона непервна на інтервалі (а;b) і, крім того, неперервна справа в точці а і зліва в точці b.

Теорема Больцано-Кошы

Якщо функцыя неперервна на выдрізку (а,b) ы набуваэ на рызних значень A=f(a), B=f(b) різних знаків, тоді в середині (а,b) знайдеться принаймі одна точка с, така , що f(c)=0

Нехай А = f(a)>0 B=f(b) <0

Поділимо (а,b) навпіл, точкою – середина відрізку. Якщо f()=0, тоді теорема доведена, якщо f()0 тоді обираємо відрізки , так щоб значення на кінцях відрізків набувало різних значень.

Нехай - середина тоді якщо f()=0 – теорема доведена.Якщо f() 0, тоді беремо .Продовжуємо цю процедуру доти доки не знайдемо якусь точку f(c)=0, тоді теорема доведена.

Теорема 2 Больцаго-Коші

Якщо функція f неперервна на відрізку (a,b), та А=f(a), B=f(b), тодa для будь-якого значення С, яке лежить між А та В знайдеться таке c, що с є(а,b), така, що f(c)=C, в випадку коли А та В протилежні за значенням С=0

**№21** .Функція називається неперервною на відрізку , якщо вона неперервна в кожній його точці , при цьому в точці x=a – неперервна справа (f(a-0) =f(a)), а в точці x=b – неперервна зліва

(f(b-0) =f(b)).

Теорема Вейєрштрасса про обмеженість функції.

Якщо функція неперервна на відрізку , то вона обмежена на цьому відрізку , тобто

M>0 : ≤M

Доведення від супротивного :

Припустимо , що а не є обмеженою , тоді для будь-якого С

С=1,2,3,4….n,……

Послідовність точок : є [a,b] f(x)>n n є N

Із теореми Больцона-Веєрштрасса з {x} виділимо підпослідовність {} Є [a,b] збіжну до точки Є [a,b]

{f()}=>f(E) f()>

Одержана суперечність доводить теорема.

**№22** .Гіперболічні функції

гіперболічний синус: 

гіперболічний косинус: 

гіперболічний тангенс: 

Властивості :



[Парність](http://uk.wikipedia.org/w/index.php?title=%D0%9F%D0%B0%D1%80%D0%BD%D1%96_%D1%96_%D0%BD%D0%B5%D0%BF%D0%B0%D1%80%D0%BD%D1%96_%D1%84%D1%83%D0%BD%D0%BA%D1%86%D1%96%D1%97&action=edit&redlink=1):







Похідні:





